第 29 講　証明(2)

1　関数　$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$ を示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを，数学的帰納法で示せ．ただし，有理数 r，s を用いて表される実数 $r+s\sqrt{2}$ は　$s\neq 0$　ならば無理数であることを，証明なく用いてもよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を自然数とする．

(1)　不等式　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n \geqq 3$　が成り立つことを証明せよ．

(2)　不等式　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n \geqq 3^n(n!)^2$　が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b を実数とする．関数　$f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{\sqrt{5}}$ は　$f(1)=1$，$f(2)=1$ を満たすとする．

(1)　a，b の値を求めよ．

(2)　$f(2)+f(3)=f(4)$　が成り立つことを示せ．

(3)　x が自然数のとき，$f(x)$ も自然数となることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 29 講　証明(2)

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の条件を満たしている.

$$a_1=1,\ b_1=0,\ a_n=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}\quad (n\geqq 1),\ b_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+1}}\quad (n\geqq 1)$$

このとき, $b_{n+1}=$ ア a_n-b_n, $a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{\text{イ}}}{a_n}$ より $b_2=$ ウ , $a_2=$ エ ,

$b_3=$ オ , $a_3=$ カ である. これらより, $a_n=n^{\text{キ}}$, $b_n=n(n-$ ク $)$ と推測され, これらが正しいことが数学的帰納法で証明できる. したがって,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{(n-\boxed{\text{ケ}})n(n+\boxed{\text{コ}})}{3}$$ である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　証明(2)

1　関数　$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$ を示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを，数学的帰納法で示せ．ただし，有理数 r，s を用いて表される実数 $r+s\sqrt{2}$ は　$s\neq 0$　ならば無理数であることを，証明なく用いてもよい．

(1)　$\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}}{1+\left(\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\right)^2}=\dfrac{2(2^x+1)(2^x-1)}{(2^x+1)^2+(2^x-1)^2}=\dfrac{2(2^{2x}-1)}{2\cdot 2^{2x}+2}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=f(2x)$

よって　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$

(2)「$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数である」　……①　について

(Ⅰ)　$n=1$ のとき　$b_1=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

これは無理数より

$n=1$ のとき①は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき　①が成り立つ，つまり　b_k は無理数であるとする．

(1)より　$b_k=f\left(\dfrac{1}{2^k}\right)=f\left(2\cdot\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)=\dfrac{2f\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)}{1+f\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^2}=\dfrac{2b_{k+1}}{1+{b_{k+1}}^2}$

ここで　b_{k+1} が有理数であるとすると　$\dfrac{2b_{k+1}}{1+{b_{k+1}}^2}$

つまり　b_k も有理数となり矛盾する．

したがって　b_{k+1} も無理数である．つまり　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数である．

2　n を自然数とする．

(1)　不等式　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n\geqq 3$　が成り立つことを証明せよ．

(2)　不等式　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n\geqq 3^n(n!)^2$　が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(1)　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\dfrac{2}{n}\right)^n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=1+n\cdot\frac{2}{n}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2^2}{n^2}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n$$

$$=3+\frac{2(n-1)}{n}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n\geqq 3$$　等号成立は　$n=1$ のとき.

よって　$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\geqq 3$　である.

(2)　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n\geqq 3^n(n!)^2$　……①　について

(Ⅰ)　$n=1$ のとき　①の左辺，右辺ともに 3 より①は成り立つ.

(Ⅱ)　$n=k$ のとき　①が成り立つとすると

$$(k+1)^{k-1}(k+2)^k\geqq 3^k(k!)^2$$

このとき

$$(k+2)^k(k+3)^{k+1}=(k+1)^{k-1}(k+2)^k\cdot\frac{(k+3)^{k+1}}{(k+1)^{k-1}}$$

$$\geqq 3^k(k!)^2\cdot\frac{(k+3)^{k+1}}{(k+1)^{k-1}}=3^k(k!)^2\cdot(k+1)^2\cdot\left(\frac{k+3}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$=3^k\{(k+1)!\}^2\cdot\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$\geqq 3^k\{(k+1)!\}^2\cdot 3$$　((1)より)

$$=3^{k+1}\{(k+1)!\}^2$$　より

$(k+2)^k(k+3)^{k+1}\geqq 3^{k+1}\{(k+1)!\}^2$　よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ.

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての自然数 n で①は成り立つ.

3　a，b を実数とする．関数　$f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{\sqrt{5}}$ は　$f(1)=1$，$f(2)=1$ を満たすとする.

(1)　a，b の値を求めよ.

(2)　$f(2)+f(3)=f(4)$　が成り立つことを示せ.

(3)　x が自然数のとき，$f(x)$ も自然数となることを示せ.

(1)　$f(1)=1$ より　$\dfrac{a-b}{\sqrt{5}}=1$　よって　$a-b=\sqrt{5}$

$f(2)=1$ より　$\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{5}}=1$　$(a+b)(a-b)=\sqrt{5}$　よって　$a+b=1$

したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$，　$\boldsymbol{b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$

(2)　$ab=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-1$

$$f(4)=\frac{a^4-b^4}{\sqrt{5}}=\frac{(a^3-b^3)(a+b)-ab(a^2-b^2)}{\sqrt{5}}=\frac{a^3-b^3}{\sqrt{5}}+\frac{a^2-b^2}{\sqrt{5}}=f(3)+f(2)$$

よって　$f(2)+f(3)=f(4)$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$f(x+2)=\dfrac{a^{x+2}-b^{x+2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{(a^{x+1}-b^{x+1})(a+b)-ab(a^x-b^x)}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{a^{x+1}-b^{x+1}}{\sqrt{5}}+\dfrac{a^x-b^x}{\sqrt{5}}$

よって　$f(x+2)=f(x+1)+f(x)$ が成り立つ.

したがって，$f(x)$，$f(x+1)$ が自然数のとき，$f(x+2)$ も自然数となる.

$f(1)$，$f(2)$ は自然数より，帰納的にすべての自然数 x で $f(x)$ は自然数となる.

よって示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 29 講　証明(2)

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の条件を満たしている．

$a_1=1$，$b_1=0$，$a_n=\dfrac{b_n+b_{n+1}}{2}$　$(n\geqq 1)$，$b_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+1}}$　$(n\geqq 1)$

このとき，$b_{n+1}=$ ア a_n-b_n，$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{イ}}{a_n}$ より $b_2=$ ウ，$a_2=$ エ，

$b_3=$ オ，$a_3=$ カ である．これらより，$a_n=n^{キ}$，$b_n=n(n-$ ク $)$ と推測され，これらが正しいことが数学的帰納法で証明できる．したがって，

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{(n-\text{ケ})n(n+\text{コ})}{3}$　である．

$a_n=\dfrac{b_n+b_{n+1}}{2}$　より　$b_{n+1}=\mathbf{2}a_n-b_n$

$b_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+1}}$　より　$b_{n+1}{}^2=a_n a_{n+1}$　よって　$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{\mathbf{2}}}{a_n}$

これらより　$b_2=2a_1-b_1=\mathbf{2}$　　$a_2=\dfrac{b_2{}^2}{a_1}=\mathbf{4}$　　$b_3=2a_2-b_2=\mathbf{6}$　　$a_3=\dfrac{b_3{}^2}{a_2}=\mathbf{9}$

$b_4=2a_3-b_3=12$　　$a_4=\dfrac{b_4{}^2}{a_3}=16$

$\{a_n\}$：1，4，9，16，……　より　$a_n=n^{\mathbf{2}}$　と予想される．

$\{b_n\}$：0，2，6，12，……　より　b_n の階差数列の一般項が $2n$ と予想され，この予想の元に

$n\geqq 2$　のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k=0+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=(n-1)n$　（$n=1$ のときも成立）

であるから，　$b_n=n(n-\mathbf{1})$　と予想される．

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$　より　予想は正しい．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　予想が正しいと仮定すると，$a_k=k^2$　　$b_k=(k-1)k$

このとき　$b_{k+1}=2a_k-b_k=2k^2-(k-1)k=k^2+k=k(k+1)$

$a_{k+1}=\dfrac{b_{k+1}{}^2}{a_k}=\dfrac{k^2(k+1)^2}{k^2}=(k+1)^2$　より $n=k+1$ のときも予想は正しい．

［Ⅰ］［Ⅱ］より，すべての自然数 n について　$a_n=n^2$，$b_n=n(n-1)$　である．

このとき　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}(n-\mathbf{1})n(n+\mathbf{1})$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。